

基于 LTI 射线追踪的改进的 ART 算法

赵祥模¹⁾ 李娜²⁾ 关可¹⁾ 宋焕生¹⁾

¹⁾(长安大学信息工程学院, 西安 710064) ²⁾(西安邮电学院通信工程系, 西安 710121)

摘要 CT 反演常采用“直线重构模型”,即认为射线在震源和接收器之间走直线,这一条件只有在介质基本均匀的情况下近似成立。当介质中存在缺陷,射线行走路径不再是直线而是空间曲线时,若仍然采用“直线重构模型”进行反演,必然引入误差。本文提出了改进的 ART 算法,并在迭代的过程中利用基于旅行时的线性插值(LTI)射线追踪正演射线的实际行走路径。该算法首先利用概率的方法预判缺陷单元,将预判的缺陷单元与非缺陷单元区别对待,赋予不同的初始波速,在每轮迭代之前利用 LTI 射线追踪重新计算投影矩阵,并在迭代的过程中给预判的缺陷单元与非缺陷单元赋予不同的松弛因子。计算机模拟实验及混凝土试件实验结果表明,基于 LTI 射线追踪的改进的 ART 算法有效提高了计算的精度和图像重建质量,但是相应地增加了反演时间。

关键词 混凝土 图像重建 层析成像 射线追踪

中图法分类号: TU317 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)05-859-07

An Improved ART Algorithm Based on Linear Travel Time Interpolation Ray Tracing

ZHAO Xiang-mo¹⁾, LI Na²⁾, GUAN Ke¹⁾, SONG Huan-sheng¹⁾

¹⁾(College of Information Engineering, Chang'an University, Xi'an 710064)

²⁾(Department of Telecommunications Engineering, Xi'an Institute of Posts and Telecommunications, Xi'an 710121)

Abstract Straight line reconstruction model is frequently used in concrete computerized tomography. It assumes the ray travels in a straight line between a sending transducer and a receiving transducer, which is valid for homogeneous medium. When there are defects in the medium, the ray will not travel in a straight line but in a spatial curve, and if still using straight line reconstruction model, error will be brought in. An improved algebraic reconstruction technique (ART) is put forward in the paper, and linear travel time interpolation (LTI) ray tracing is used during the iterations to obtain the real travel paths of rays. Firstly, defect meshes are ascertained by probability and mathematical statistic method, and then defect meshes and normal meshes are provided with different initial wave velocities. Secondly, the projection matrix is anew computed by LTI ray tracing before each iteration. And during each iteration, defect meshes and normal meshes are provided with different relaxation factors. The results of computer simulation and concrete model experiment show that the improved ART based on LTI ray tracing is effective to improve the accuracy of computation and the quality of image reconstruction on concrete, but takes more time.

Keywords concrete, image reconstruction, computerized tomography, ray tracing

基金项目: 国家西部交通建设科技项目(200431881222);教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-05-0849)

收稿日期:2007-06-26;改回日期:2007-12-12

第一作者简介:赵祥模(1966~),男,教授。2006年于长安大学获载运工具运用工程专业博士学位。主要研究方向为交通信息工程与智能测控技术。E-mail: xzmzhao@chd.edu.cn

1 引言

层析成像^[1-5]是在不损伤研究“对象”内部结构的条件下,利用某种射线源,根据从“对象”外部用检测设备所获得的投影数据,依照一定的物理和数学关系,利用计算机反演“对象”内部未知的某种物理量的分布,生成 2 维、3 维图像,重现“对象”内部特征。人们把函数分布称为图像,对象内部某物理量的图像是未知的。CT 技术就是由投影数据来获得未知图像,亦称为图像重建。

在混凝土超声 CT 中,一般都采用直线射线追踪,即把介质视为均匀完好的,用直线把发射点和接收点连起来,作为射线传播的路径。其特点是计算简单,当观测系统确定后,射线路径矩阵也就随之固定不变了。但由于超声波在混凝土中的传播特性以及混凝土本身的不均匀性,特别是当混凝土中存在蜂窝、孔洞等异常体时,超声波会产生折射、绕射等,使其传播路径发生明显的弯曲。因此适合混凝土超声 CT 的射线追踪应当是弯曲射线追踪。

射线追踪^[6-8]的理论基础是,在高频近似条件下,地震波场的主能量沿射线轨迹传播。射线追踪的方法很多^[9],目前应用效果好的弯曲射线追踪方法有两类:一类是基于程函方程的有限差分法;另一类是基于 Huygens 原理的最短路径法。其中,LTI (linear travel time interpolation) 算法是一种精确、稳定、有效的射线追踪方法。LTI 算法通过对模型进行网格剖分,能有效计算包括直达波、折射波、投射波等在内的多种初至波的旅行时间和路径,可以适应任意变速介质,而且 LTI 算法还有一个很大的优势,即它不是简单的将边界节点的连线作为射线路径,而是通过线性插值,在满足 Fermat 原理的条件下的精确点处与边界相交,因此常速单元内的射线路径总是直线,同时边界处的折射角度也是随着入射角而连续变化的,LTI 算法是一种计算精度较高的射线追踪方法。

由于传统的 ART 算法存在计算精度不高的问题,因此在改进 ART 算法的基础上,引入 LTI 射线追踪进行混凝土波速层析成像,进一步提高了图像重建的质量。

2 改进的 ART 算法

2.1 声波层析成像方程

如图 1 所示,假设测区共有 n 条测线通过,划分成 $p \times q = m$ 个网格(成像单元)。其中, l_i 为第 i 条测线长度(发射换能器 T 到接收换能器 R 之间的直线距离), τ_i 为 l_i 从激发点到接收点的走时(声时), a_{ij} 为第 i 条射线在第 j 个成像单元内的线段长度, f_j 为第 j 个成像单元的慢度,即波速的倒数。

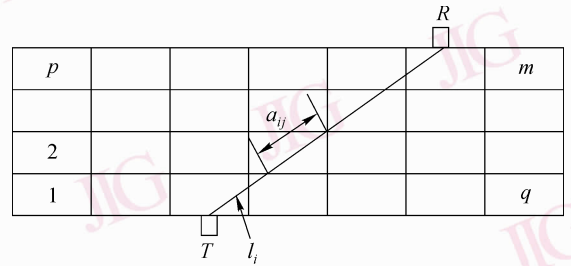


图 1 测区网格划分示意图

Fig. 1 Mesh division of test region

求各个成像单元的慢度,最终转化成求解以下线性方程组:

$$\begin{cases} \tau_1 = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \cdots + a_{1m}f_m \\ \tau_2 = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{2m}f_m \\ \vdots \\ \tau_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \cdots + a_{nm}f_m \end{cases} \quad (1)$$

或写成以下矩阵方程:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{A}\mathbf{f} \quad (2)$$

\mathbf{A} 称为投影矩阵。对于式(2),通常采用对方程组建立一个优化判断或将导出的某一组不等式作为实现优化的约束,根据射线走时 τ , 寻求使 $\|e\|^2 = \|\boldsymbol{\tau} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|^2$ 取得最小值的向量 \mathbf{f} 。

2.2 改进的 ART 算法

在传统的 ART 算法^[10-11]中,各个成像单元波速的迭代初始值的选取仅仅是凭借先验知识,通常给定一个统一的值作为迭代初始值,并且在迭代的过程中,将每条射线的走时残差均匀地分配给各个网格单元。但在实际过程中,对射线的走时的影响主要是由个别缺陷单元引起的,如果能够预先确定每个网格为缺陷单元的可能性,在迭代初始值的选择以及在迭代过程中区别对待,可以提高算法的精度。下面给出了具体的实现方法,测区射线编号如图 2 所示。

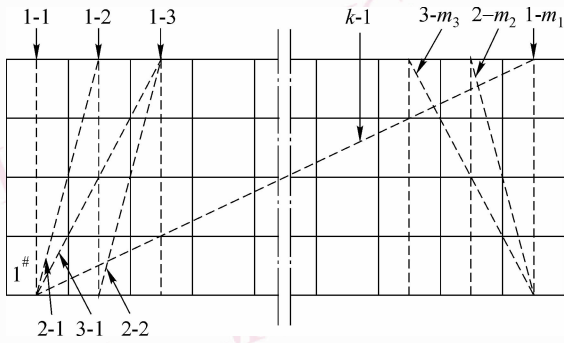


图2 测区射线分类示意图

Fig. 2 Ray classification of test region

(1) 确定缺陷单元

$$v_i = \sum_j a_{ij} / \tau_i \quad (3)$$

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^n v_i / n \quad (4)$$

$$s_v = \sqrt{\sum_i (v_i - \bar{v})^2 / (n - 1)} \quad (5)$$

式中, v_i 为第 i 条射线的波速; \bar{v} 为波速平均值; s_v 为波速标准差; n 为通过测区的射线总数。

通常人们认为正态分布是自然界中最常见的概率分布,从《基桩低应变动力检测规程》^[12]中关于判据的计算可知,其判据计算也是在认定基桩或混凝土构件的声时、声幅、声速等参数的概率分布可近似为正态分布这一前提下进行的。在同一测区内,对于一系列的观测,可以假设各条射线波速服从正态分布 $N(\mu_v, \sigma^2)$,则有 $\frac{\bar{v} - \mu_v}{s_v^* / \sqrt{n}} \sim t(n - 1)$,其中, s_v^* 为波速修正样本标准差。利用 t 分布的上侧分位数表,查出置信概率 P 所对应的上侧分位数 λ ,按照下式求出正常区域波速的下限值,即从物理意义明确的声速小对应缺陷这一点剔除小于临界值的数据。

$$V_0 = \bar{v} - \lambda \cdot s_v^* / \sqrt{n} \quad (6)$$

如果某条射线的波速小于临界波速,即 $v < V_0$,则认为该条射线穿过缺陷单元,并假定它所穿过的网格单元均为缺陷,但实际上这其中可能包含正常单元。

首先,按照式(6),求出最短射线 1-1 ~ 1- m_1 的临界波速 V_0^1 ,并找出穿过缺陷单元的射线,从而确定缺陷单元的集合 M ,实际上, M 中可能包含正常单元。

其次,按照式(6),依次计算 2-1 ~ 2- m_2 , 3-1 ~ 3- m_3 , ..., $k-1$ ~ $k-m_k$ 各组射线的临界波速 V_0^j ($j = 2, 3, \dots, n$)。如果某条射线的波速大于该组射线的临

界波速,即 $v_i > V_0^j$,则认为该射线正常,它所穿过的所有网格单元均正常,从而得到正常射线穿过的单元集合 N 。

求 M 与 N 的差集 P ,则 $M - N = P$ 就是最终预判的缺陷单元。

(2) 确定迭代的初值

把不穿过缺陷单元的射线长度及声时值相除作为正常射线的平均波速 \bar{v}' ,将其赋给预判的正常单元,把最小的射线波速 v_{\min} 赋给预判的缺陷单元,从而确定了各个网格的迭代初始波速。

$$v_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} v_i \quad (7)$$

(3) 预判的缺陷单元与正常单元取不同的松弛因子进行迭代

记第 q 轮迭代时第 i 条射线对第 j 个网格单元的波慢估算值为 $\hat{f}_j^{q,i}$,应用式(8),逐条射线 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 逐轮对波慢做如下修改,当 j 为预判的缺陷单元时,取松弛因子 $\mu = \mu_1$,当 j 为正常单元时,取 $\mu = \mu_2$,其中 $0 < \mu_2 < \mu_1 \leq 1$ 。当完成一轮迭代后,判断是否达到精度要求,如果满足要求,则停止迭代;否则,按式(8)继续迭代。

$$\hat{f}_j^{q,i+1} = \hat{f}_j^{q,i} + \mu \frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^m a_{ij}^2} (\tau_i - \hat{\tau}_i^q) \quad (8)$$

3 基于 LTI 射线追踪的改进的 ART 算法

超声波在混凝土中并不是严格按照直线传播,遇到蜂窝、孔洞等异常体,往往会产生折射和绕射,使其传播路径发生明显的弯曲。因此在超声混凝土层析成像中采用 LTI 射线追踪方法求出射线路径。考虑到 LTI 射线追踪法^[13-15]对模型依赖性强的特点,提出了用概率法确定模型初始波速的方法,在采用改进的 ART 算法迭代的过程中,用 LTI 方法不断更新投影矩阵,从而达到提高图像重建质量的目的。

采用基于 LTI 射线追踪的改进的 ART 算法进行波速反演的步骤如下:

(1) 按照式(3)计算射线波速,用概率的方法预判缺陷单元,用 v_{\min} 给缺陷单元赋初始波速, \bar{v}' 给正常单元赋初始波速,从而得到初始波速向量 V_0 和初始慢度向量 F_0 。

(2) 根据初始慢度 F_0 ,用 LTI 射线追踪算法求出投影矩阵 A_0 ,置 $q = 1$ 。

(3) 根据投影矩阵 A_{q-1} 和慢度向量 F_{q-1} , 按式(8)进行一轮迭代, 求出新的慢度 F_q , 其中预判的缺陷单元与正常单元取不同的松弛因子。

(4) 若满足收敛标准, 则停止计算。否则, 根据慢度 F_q , 用 LTI 射线追踪算法求出新的投影矩阵 A_q , 并置 $q = q + 1$, 转步骤(3)。

4 计算机模拟实验

在以下算例中, 对于划分的网格均以列优先, 按从下到上, 从左到右的顺序编号。

4.1 算例 1

此算例的速度模型如图 3 所示, 测区面积为 $120\text{ cm} \times 120\text{ cm}$, 像元为 $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$, 背景速度为 $4\,000\text{ m/s}$, 模型中同时存在一个速度为 $4\,600\text{ m/s}$ 的高速区和 3 个速度为 $3\,400\text{ m/s}$ 的低速区, 其相对背景速度的差异均为 15% , 每个异常区面积占总面积的 2.8% 。采用上下单向检测方式, 以 LTI 射线追踪进行走时正演。

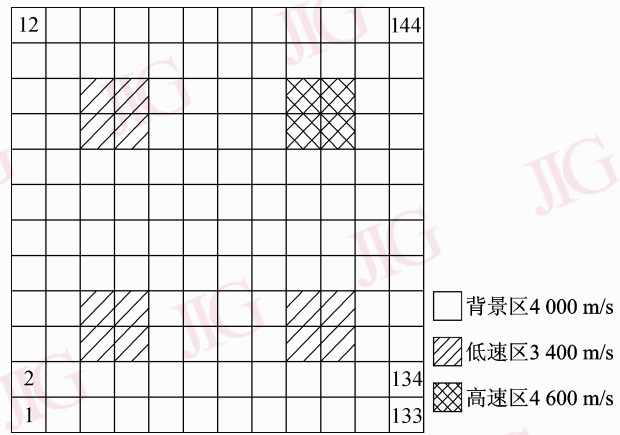


图 3 算例 1 速度模型

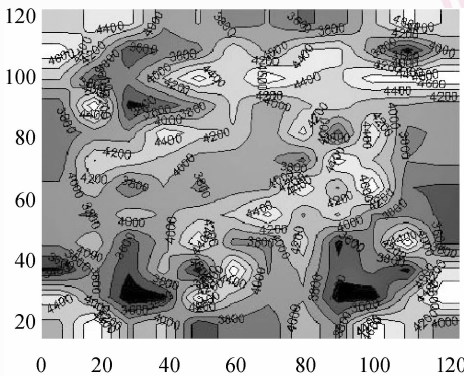
Fig. 3 Computer simulation velocity model of example 1

根据模型波速, 利用 LTI 射线追踪求出射线路径和每条射线的走行时间, 并将此走行时间作为理论走时, 进行 100 轮 ART 迭代, 其计算结果如表 1 所示, 反演结果如图 4(a) 所示。参看其反演图像, 缺陷位置不清晰, 成像效果不好。

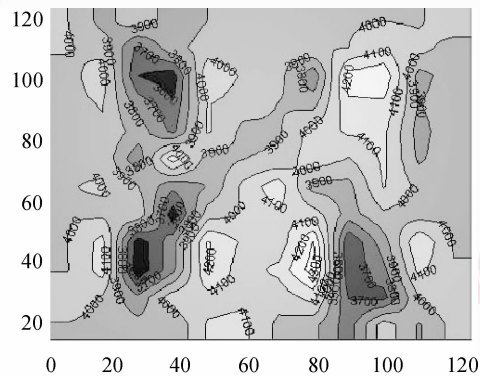
表 1 算例 1 计算结果对比

Tab. 1 Comparison of computing results of example 1

算法	背景区波速		低速区波速		高速区波速		波速 离差	波速最坏 距离(m/s)
	平均值 (m/s)	平均相对 误差(%)	平均值 (m/s)	平均相对 误差(%)	平均值 (m/s)	平均相对 误差(%)		
本文算法	3 977. 11	-0.57	3 661. 13	7. 68	4 224. 85	-8. 16	157. 88	460. 09
直线追踪	4 037. 14	0. 92	3 657. 17	7. 56	4 353. 40	-5. 36	413. 56	812. 16



(a) 基于直线追踪的ART



(b) 基于LTI的改进的ART

图 4 算例 1 CT 反演色谱图

Fig. 4 2D display of wave velocity of example 1

根据概率法预判缺陷单元并确定各单元的初始波速,在迭代过程中采用LTI算法追踪射线路径并不断修正投影矩阵。在此模型中,预判27、28、29、30、31、32、33、34、35、36、41、42、43、44、45、46、47、48、97、98号单元为缺陷单元,存在错判和漏判的情况,使得错判和漏判单元的迭代初始波速与模型波速偏离较大,但是在迭代的过程中,对这些单元的波速不断进行修正,使其尽可能接近模型波速。由图4可见,基于LTI射线追踪的改进的ART算法比基于直线追踪的ART效果好。但由于每次迭代都需要重新进行路径追踪,而射线追踪的精度又跟边界上插入的计算点多少有关,因此,是以计算量增大为代价提高成像质量和计算精度的。

4.2 算例2

此算例的速度模型如图5所示,测区面积为100 cm × 60 cm,像元为10 cm × 10 cm,其中22、23、28、29、34、35号为缺陷单元,背景波速为4 500 m/s,缺陷波速为4 050 m/s,其相对背景波速的差异为11.11%。采用上下单向检测方式,以LTI正演走时。

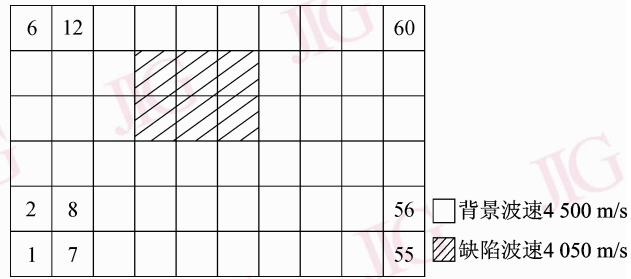
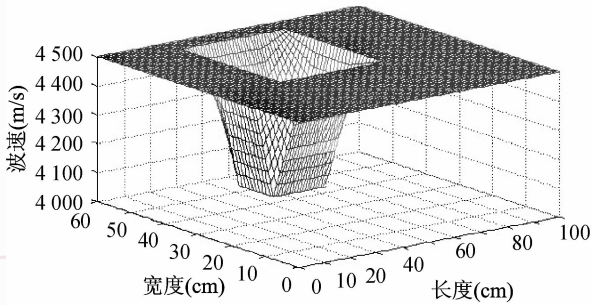


图5 算例2速度模型

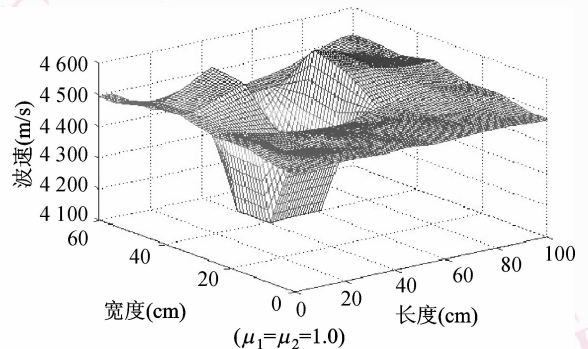
Fig. 5 Computer simulation velocity model of example 2

在进行ART迭代的过程中,缺陷单元和正常单元取不同的松弛因子 μ ,缺陷单元取 μ_1 ,正常单元取 μ_2 。分别按 $\mu_1 = \mu_2 = 1.0$, $\mu_1 = 1.0, \mu_2 = 0.5$ 和 $\mu_1 = 1.0, \mu_2 = 0.1$ 三种工况进行10轮迭代,每迭代一次用LTI射线追踪重新计算投影矩阵A。

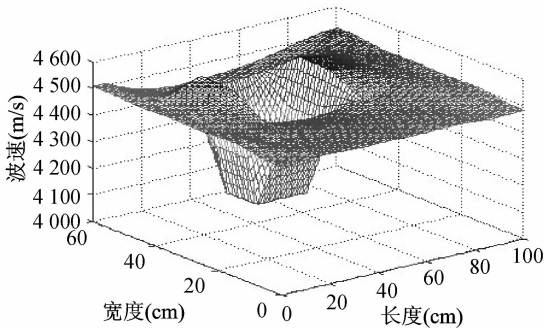
计算过程中设上限波速为4 700 m/s,采用概率法预判出22、23、28、29、30、34、35号为缺陷单元,然后用LTI射线追踪求出投影矩阵,再用改进的ART算法迭代。计算结果如表2所示,波速3维显示如图6所示。



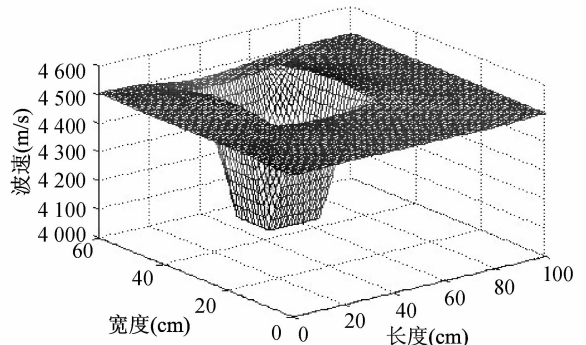
(a) 模型波速



(b) 基于LTI的改进的ART ($\mu_1 = \mu_2 = 1.0$)



(c) 基于LTI的改进的ART ($\mu_1 = 1.0, \mu_2 = 0.5$)



(d) 基于LTI的改进的ART ($\mu_1 = 1.0, \mu_2 = 0.1$)

图6 波速3维显示图

Fig. 6 3D display of wave velocity

表 2 不同松弛因子对计算精度的影响
Tab. 2 Effect on precision of different relaxation factors

松弛因子	正常区域波速				缺陷区域波速			波速离差 (m/s)	波速最 坏距离 (m/s)
	最大值 (m/s)	最小值 (m/s)	平均值 (m/s)	离差系数 (%)	最大值 (m/s)	最小值 (m/s)	平均值 (m/s)		
$\mu_1 = \mu_2 = 1.0$	4 599.1	4 422.2	4 490.4	0.91	4 129.9	4 118.5	4 125.1	46.65	99.07
$\mu_1 = 1.0, \mu_2 = 0.5$	4 563.7	4 438.6	4 492.8	0.60	4 109.3	4 098.2	4 104.0	31.65	63.74
$\mu_1 = 1.0, \mu_2 = 0.1$	4 517.7	4 472.8	4 497.5	0.19	4 070.7	4 065.0	4 067.8	27.20	10.18

由表 2 和图 6 可知,当模型简单,背景波速与缺陷波速相差不是很大时,用概率法判断的缺陷较为准确,在 ART 迭代过程中,随着 μ_1 与 μ_2 取值差异的增大,计算精度提高,缺陷位置更加准确和突出。如图 6 所示,当 $\mu_1 = 1.0, \mu_2 = 0.1$ 时,反演结果与计算机模型最为接近。

4.3 算例 3

采用算例 2 中的速度模型,以 LTI 射线追踪正

演走时,并给它分别加上 1% 和 5% 的随机误差,在进行 ART 迭代的过程中,缺陷单元和正常单元取不同的松弛因子 μ ,缺陷单元取 $\mu_1 = 1.0$,正常单元取 $\mu_2 = 0.5$,反演结果如表 3 所示。

由表 3 可见,随着加入随机误差的增大,正常区域和低速区波速的平均相对误差随之增大,波速离差、波速最坏距离也随之增大。

表 3 随机误差对计算结果的影响

Tab. 3 Effect on precision of random error

误差程度	正常区域波速		低速区波速		波速离差 (m/s)	波速最坏 距离 (m/s)
	平均值 (m/s)	平均相对 误差 (%)	平均值 (m/s)	平均相对 误差 (%)		
无误差	4 492.80	-0.16	4 103.97	1.31	31.65	63.74
加入 1% 随机误差	4 432.92	-1.49	4 066.43	0.41	51.13	97.83
加入 5% 随机误差	4 382.18	-2.62	3 942.71	-2.65	179.78	233.81

5 混凝土试件实验

利用如图 7 所示的混凝土试件做实验,试件断面测区长 44 cm、深 50 cm,其中,中心部分为缺陷(混凝土夹泥),大小为 15 cm × 15 cm,将该测区离散化为 4 cm × 5 cm 的网格单元,分别在长度方向的两侧布置发射/接收换能器,相邻两个发射/接收换能器的间距为 4 cm,获得 11 × 11 个声时。分别用基于直线射线追踪的 ART、基于 LTI 射线追踪的 ART 以及基于 LTI 射线追踪的改进的 ART 算法反演,得到的断面波速分布如图 8 所示。

混凝土试件的断面波速分布图进一步证明了基于 LTI 射线追踪的改进的 ART 算法比基于直线射

线的 ART 算法以及基于 LTI 的 ART 算法,更能准确、有效地反映混凝土内部质量。

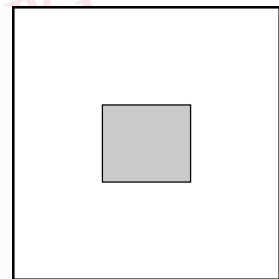


图 7 试件模型

Fig. 7 Concrete model

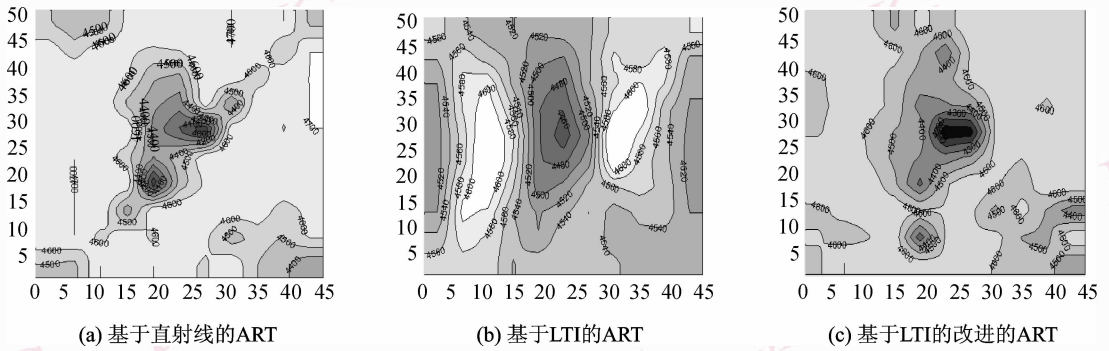


图8 断面波速分布

Fig. 8 2D display of wave velocity

6 结论

对 ART 算法进行改进,提出了用概率的方法确定缺陷单元。对缺陷单元与非缺陷单元区别对待,赋予不同的初始波速,并在迭代的过程中对其赋予不同的松弛因子。将改进的 ART 算法与 LTI 射线追踪结合,降低了模型误差,提高了计算精度。

计算机仿真结果及混凝土试件实验结果表明,基于 LTI 射线追踪的改进的 ART 算法大大提高了计算的精度和图像重建质量,但是,这是以牺牲时间为代价的。

参考文献 (References)

- 1 Feschet Fabien, Gerard Yan. Computerized tomography with digital lines and linear programming [A]. In: Proceedings of the 12th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery [C], Heidelberg, Germany: Springer Verlag, 2005, 3429: 126-135.
- 2 Koshoyi V V, Nazarchuk Z T. Estimating the predefective state of a material using methods of ultrasonic computerized tomography [J]. Materials Science, 2001, 37(2): 279-293.
- 3 Smith Brian J, Adhami Reza R. Enhanced localized computerized tomography employing the discrete wavelet transform [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2000, 19(5): 399-409.
- 4 Huang Zheng-yu, Huang Liang, Miao Lun. Study on computerized tomography of ultrasonic attenuation for concrete [J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2004, 1(2): 35-38. [黄政宇,黄靓,缪仑. 混凝土超声波幅值衰减层析成像研究[J]. 铁道科学与工程学报, 2004, 1(2): 35-38.]
- 5 Zhao Ming-jie, Xu Rong. Ultrasonic tomography technology and its applications in undamage test of bridge foundation piles [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University, 2001, 20(2): 73-77. [赵明阶,徐蓉. 超声波 CT 成像技术及其在大型桥梁基桩无损检测中的应用[J]. 重庆交通学院学报, 2001, 20(2): 73-77.]

- 6 Pantazopoulos J S, Tzafestas S G. An efficient algorithm for ray tracing [J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2000, 28(1): 171-180.
- 7 Grunberg Marc, Genaud Stephane, Mongenet Catherine. Seismic ray-tracing and Earth mesh modeling on various parallel architectures [J]. Journal of Supercomputing, 2004, 29(1): 27-44.
- 8 Rathore S K, Kishore N N, Munshi P. An improved method for ray tracing through curved inhomogeneities in composite materials [J]. Journal of Nondestructive Evaluation, 2003, 22(1): 1-9.
- 9 Zhang Po, Liu Hong, Li You-ming. The situation and progress of ray tracing method research [J]. Progress in Geophysics, 2000, 15(1): 36-45. [张钊,刘洪,李幼铭. 射线追踪方法的发展现状[J]. 地球物理学进展, 2000, 15(1): 36-45.]
- 10 Ko H S, Kihm K D. An extended algebraic reconstruction technique (ART) for density-gradient projections: laser speckle photographic tomography [J]. experiments in fluids, 1999, 27(6): 542-550.
- 11 Yan Sheng-cun, Li Zhen-zhao, Xue Gui-yu, et al. Discussion on algebraic reconstruction techniques in computerized tomography of dams and its improvement [J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2001, 34(4): 29-34. [阎生存,李珍照,薛桂玉等. 大坝 CT 中 ART 算法及其改进探讨[J]. 武汉大学学报(工学版), 2001, 34(4): 29-34.]
- 12 JGJ/T93-95. Specification for low strain dynamic testing of piles [S]. [JGJ/T93-95. 基桩低应变动力检测规程[S].]
- 13 Huang Liang, Huang Zheng-yu. An improved method of linear interpolation ray tracing [J]. Natural Science Journal of Xiangtan University, 2002, 24(4): 105-108. [黄靓,黄政宇. 线性插值射线追踪的改进方法[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2002, 24(4): 105-108.]
- 14 Nie Jian-xin, Yang Hui-zhu. Quadratic/linear travel time interpolation of seismic ray-tracing [J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2003, 43(11): 1495-1498. [聂建新,杨慧珠. 地震波旅行时二次/线性联合插值法[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2003, 43(11): 1495-1498.]
- 15 Zhao Gai-shan, Hao Shou-lin, Yang Er-hao, et al. Seismic ray tracing algorithm based on the linear travelttime interpolation [J]. Geophysical Prospecting for Petroleum, 1998, 37(2): 14-25. [赵改善,郝守玲,杨尔皓等. 基于旅行时线性插值的地震射线追踪算法[J]. 石油物探, 1998, 37(2): 14-25.]